

極大値・極小値

月 日 名前

増減 $f'(x) > 0$ の区間で増加、 $f'(x) < 0$ の区間で減少

極値 $f'(a) = 0$ で、 $f'(x)$ の符号が $x = a$ の前後で + から - に変われば極大、- から + に変われば極小

注意 $f'(a) = 0$ でも、前後で符号が変わらなければ極値ではない

実数解 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつのは $b^2 - 4ac > 0$ のとき

1 関数 $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ の増減表をかき、極値を求めよ。

2 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y = -x^3 + 3x + 1$

(2) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

3 関数 $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ は極値をもたないことを示せ。

4 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ が $x = -1$ で極大値 5 をとるとき、定数 a 、 b の値を求めよ。

5 $a > 0$ とする。 $f(x) = x^3 - 3ax$ の極小値が -2 となるような a の値を求めよ。

6 $f(x) = x^3 + kx$ が極値をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

7 1 辺 12 cm の正方形の厚紙の四隅から、1 辺 x cm の正方形を切り取り、ふたのない箱を作る。箱の容積が最大になる x の値と、そのときの容積を求めよ。

8 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の極大値と極小値を求め、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。



極大値・極小値

- ① $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ 。 $x = 1$ で極大値 5、 $x = 3$ で極小値 1 ($x < 1$ で増加、 $1 < x < 3$ で減少、 $3 < x$ で増加)
- ② (1) $y' = -3(x+1)(x-1)$ 。 $x = 1$ で極大値 3、 $x = -1$ で極小値 -1
 (2) $y' = 4x(x+1)(x-1)$ 。 $x = 0$ で極大値 3、 $x = \pm 1$ で極小値 2
- ③ $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0$ 。 $x = -1$ で $y' = 0$ になるが、前後で符号が変わらないので極値をもたない (つねに増加)
- ④ $f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$ 、 $f(-1) = -1 + a - b = 5$ より $a = -3$ 、 $b = -9$ 。このとき $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$ で、 $x = -1$ の前後で $+$ から $-$ に変わるのだから極大
- ⑤ $f'(x) = 3(x^2 - a)$ 。 $x = \sqrt{a}$ の前後で f' の符号が $-$ から $+$ に変わるのだから、ここで極小。
 $f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} = -2$ より $a\sqrt{a} = 1$ 、 $a = 1$
- ⑥ $f'(x) = 3x^2 + k = 0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいので $k < 0$
- ⑦ $V = x(12 - 2x)^2$ ($0 < x < 6$)。 $V' = 12(x-2)(x-6)$ より、 $0 < x < 2$ で増加、 $2 < x < 6$ で減少する。よって $x = 2$ で最大、容積は 128 cm^3
- ⑧ $f'(x) = 3x(x-2)$ 。 $x = 0$ で極大値 4、 $x = 2$ で極小値 0。 $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ なので、グラフは $x = -1$ で x 軸と交わり、 $(2, 0)$ で x 軸に接する