

# 最大値・最小値

月 日 名前

- 手順**  $a \leq x \leq b$  での最大・最小は、増減表をかき、区間の中の極値と両端の値  $f(a)$ 、 $f(b)$  を比べる
- 注意** 極大値がそのまま最大値になるとは限らない。区間の外の極値は使わない
- 文字** 区間の端に文字があるときは、極値をとる  $x$  が区間に入るかどうかで場合を分ける。必要なら、端の値と極値の大小でも分ける
- 文章題** 求めたい量を1つの文字の関数で表し、その文字のとりうる範囲を先に決める

- 1 関数  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  ( $-1 \leq x \leq 3$ ) について、次の増減表の空欄を埋めよ。ア・オ・カ・キには数を、イ・ウ・エには符号 (+ か -) を入れる。また、最大値と最小値を求めよ。

|      |    |     |   |     |   |     |   |
|------|----|-----|---|-----|---|-----|---|
| $x$  | -1 | ... | 0 | ... | ア | ... | 3 |
| $y'$ |    | イ   | 0 | ウ   | 0 | エ   |   |
| $y$  | オ  | ↗   | カ | ↘   | キ | ↗   | 2 |

- 2 次の関数の最大値と最小値を求めよ。
- (1)  $y = 2x^3 - 6x$  ( $0 \leq x \leq 2$ )
- (2)  $y = -x^3 + 3x^2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ )
- 3 関数  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  ( $0 \leq x \leq 3$ ) の最大値と最小値を求めよ。極大値と最大値が一致しないことを確かめよ。
- 4 関数  $y = x^4 - 2x^2$  ( $-2 \leq x \leq 1$ ) の最大値と最小値を求めよ。
- 5  $a > 0$  とする。関数  $f(x) = x^3 - 6x^2$  ( $0 \leq x \leq a$ ) の最小値を求めよ。
- 6 関数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$  ( $-1 \leq x \leq 3$ ) の最大値が5のとき、定数  $k$  と最小値を求めよ。
- 7 底面の半径  $r$  と高さ  $h$  が  $r + h = 3$  を満たす円柱がある。体積が最大になる  $r$  の値と、そのときの体積を求めよ。
- 8 放物線  $y = 3 - x^2$  と  $x$  軸で囲まれた部分に、1辺が  $x$  軸上にあり、2つの頂点が放物線上にある長方形を作る。長方形の面積の最大値を求めよ。



# 最大値・最小値

|   |      |                  |                 |                 |                 |                  |                 |     |
|---|------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|-----|
| 1 | $x$  | $-1$             | $\dots$         | $0$             | $\dots$         | $^{\text{ア}} 2$  | $\dots$         | $3$ |
|   | $y'$ |                  | $^{\text{イ}} +$ | $0$             | $^{\text{ウ}} -$ | $0$              | $^{\text{エ}} +$ |     |
|   | $y$  | $^{\text{オ}} -2$ | $\nearrow$      | $^{\text{カ}} 2$ | $\searrow$      | $^{\text{キ}} -2$ | $\nearrow$      | $2$ |

$y' = 3x(x - 2)$ 。  $x = 0, 3$  で最大値  $2$ 、  $x = -1, 2$  で最小値  $-2$

2 (1)  $y' = 6(x + 1)(x - 1)$ 。  $x = 0, 1, 2$  で  $0, -4, 4$ 。  $x = 2$  で最大値  $4$ 、  $x = 1$  で最小値  $-4$

(2)  $y' = -3x(x - 2)$ 。  $x = -1, 0, 2$  で  $4, 0, 4$ 。  $x = -1, 2$  で最大値  $4$ 、  $x = 0$  で最小値  $0$

3  $y' = 6(x - 1)(x - 2)$ 。  $x = 1$  で極大値  $5$ 、  $x = 2$  で極小値  $4$ 。 両端は  $x = 0$  で  $0$ 、  $x = 3$  で  $9$ 。  
  $x = 3$  で最大値  $9$ 、  $x = 0$  で最小値  $0$  (極大値  $5$  は最大値ではない)

4  $y' = 4x(x + 1)(x - 1)$ 。  $x = -2, -1, 0, 1$  で  $8, -1, 0, -1$ 。  $x = -2$  で最大値  $8$ 、  $x = \pm 1$  で最小値  $-1$

5  $f'(x) = 3x(x - 4)$  で、  $0 \leq x \leq 4$  で減少、  $4 \leq x$  で増加。  $0 < a < 4$  のとき  $x = a$  で最小値  $a^3 - 6a^2$ 、  $a \geq 4$  のとき  $x = 4$  で最小値  $-32$

6  $f'(x) = 3x(x - 2)$ 。  $x = -1, 0, 2, 3$  で  $k - 4, k, k - 4, k$  なので最大値は  $k = 5$ 。 最小値は  $k - 4 = 1$

7  $V = \pi r^2(3 - r)$  ( $0 < r < 3$ )。  $V' = 3\pi r(2 - r)$ 。  $0 < r < 2$  で  $V' > 0$ 、  $2 < r < 3$  で  $V' < 0$  なので  $r = 2$  で最大、体積は  $4\pi$  (このとき  $h = 1$ )

8 頂点を  $(\pm t, 3 - t^2)$  ( $0 < t < \sqrt{3}$ ) とすると  $S = 2t(3 - t^2)$ 。  $S' = 6(1 - t)(1 + t)$ 。  $0 < t < 1$  で増加、  $1 < t < \sqrt{3}$  で減少するので  $t = 1$  で最大、最大値は  $4$