

# 方程式・不等式への応用

月 日 名前

|      |                                                                                             |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| 実数解  | 方程式 $f(x) = a$ の実数解の個数は、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数に等しい                               |
| 定数分離 | 文字 $a$ を含む方程式は、 $f(x) = a$ の形に直せるときは直してから、グラフで考える                                           |
| 3つの解 | 3次関数 $f(x)$ が極値をもつとき、 $f(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつのは $(\text{極大値}) \times (\text{極小値}) < 0$ のとき |
| 不等式  | ある範囲で $f(x) \geq 0$ を示すには、増減を調べて、その範囲での $f(x)$ の最小値が0以上であることを示す                             |

- 1 方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  の異なる実数解の個数を求めよ。
- 2 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。  
 (1)  $x^3 - 6x^2 + 9x - 5 = 0$  (2)  $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 0$
- 3  $a$  を定数とする。方程式  $x^3 - 3x^2 - a = 0$  の異なる実数解の個数を、 $a$  の値によって分類せよ。
- 4 方程式  $2x^3 - 3x^2 - 12x - a = 0$  が異なる3つの実数解をもつような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。
- 5 3次方程式  $x^3 - 3x^2 + k = 0$  が異なる3つの実数解をもつような定数  $k$  の値の範囲を、極大値と極小値の積を使って求めよ。
- 6  $x \geq 0$  のとき、不等式  $x^3 + 4 \geq 3x^2$  が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つときの  $x$  の値を求めよ。
- 7  $x \geq 0$  のすべての  $x$  について  $x^3 - 3x + a \geq 0$  が成り立つような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。
- 8 曲線  $y = x^3 - 2x$  と直線  $y = 10x + a$  が異なる3点で交わるような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。



# 方程式・不等式への応用

- 1  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  とおくと  $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$ 。  $x = -1$  で極大値 3、  $x = 1$  で極小値  $-1$ 。極大値と極小値の符号が異なるので、グラフは  $x$  軸と 3 点で交わり、3 個
- 2 (1)  $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ 。極大値  $f(1) = -1$ 、極小値  $f(3) = -5$  はどちらも負なので、 $x$  軸と交わるのは 1 回で 1 個  
 (2)  $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ 。極大値  $f(-2) = 27 > 0$  なので  $x < -2$  で  $x$  軸と 1 点で交わり、極小値  $f(1) = 0$  なので  $x = 1$  で  $x$  軸に接する。合わせて 2 個
- 3  $x^3 - 3x^2 = a$  と直し、  $y = x^3 - 3x^2$  と  $y = a$  の共有点を数える。  $y' = 3x(x-2)$  で、  $x = 0$  で極大値 0、  $x = 2$  で極小値  $-4$ 。  $a < -4$ 、  $0 < a$  のとき 1 個、  $a = -4$ 、  $a = 0$  のとき 2 個、  $-4 < a < 0$  のとき 3 個
- 4  $2x^3 - 3x^2 - 12x = a$  と直す。  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$  は  $y' = 6(x+1)(x-2)$  より、  $x = -1$  で極大値 7、  $x = 2$  で極小値  $-20$ 。直線  $y = a$  と 3 点で交わるのは  $-20 < a < 7$
- 5  $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$  とおくと  $f'(x) = 3x(x-2)$ 。極大値  $f(0) = k$ 、極小値  $f(2) = k - 4$ 。  
 $k(k-4) < 0$  より  $0 < k < 4$
- 6  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  とおくと  $f'(x) = 3x(x-2)$ 。  $0 \leq x \leq 2$  で減少、  $x \geq 2$  で増加するので、  $x \geq 0$  での最小値は  $f(2) = 0$ 。よって  $f(x) \geq 0$ 、すなわち  $x^3 + 4 \geq 3x^2$ 。等号は  $x = 2$  のとき
- 7  $f(x) = x^3 - 3x + a$  とおくと  $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$ 。  $0 \leq x \leq 1$  で減少、  $x \geq 1$  で増加するので、  $x \geq 0$  での最小値は  $f(1) = a - 2$ 。  $a - 2 \geq 0$  より  $a \geq 2$
- 8  $x^3 - 2x = 10x + a$  より  $x^3 - 12x = a$ 。  $y = x^3 - 12x$  は  $y' = 3(x+2)(x-2)$  より、  $x = -2$  で極大値 16、  $x = 2$  で極小値  $-16$ 。  $-16 < a < 16$