

1/6 公式と面積

月 日 名前

1/6 公式 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$

使える形 被積分関数が $(x - \alpha)(x - \beta)$ の定数倍で、 α から β まで積分するとき

1 1/6 公式を使って、 $\int_{-1}^3 (x + 1)(x - 3) dx$ を求めよ。

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^4 (x - 1)(x - 4) dx$

(2) $\int_{-3}^2 (x^2 + x - 6) dx$

3 放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

5 放物線 $y = 2x^2$ と直線 $y = 4x + 6$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

6 2つの放物線 $y = x^2$ と $y = -x^2 + 2x + 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

7 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

8 m を定数とする。放物線 $y = x^2$ と直線 $y = mx + 1$ で囲まれた部分の面積 S を m で表し、 S の最小値と、そのときの m の値を求めよ。



1/6 公式と面積

$$\boxed{1} \quad -\frac{\{3 - (-1)\}^3}{6} = -\frac{64}{6} = -\frac{32}{3}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad -\frac{(4 - 1)^3}{6} = -\frac{9}{2}$$

$$(2) \quad x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) \text{ より } -\frac{\{2 - (-3)\}^3}{6} = -\frac{125}{6}$$

$$\boxed{3} \quad x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)。-1 \leq x \leq 3 \text{ で } y \leq 0 \text{ なので、面積は}$$

$$-\int_{-1}^3 (x + 1)(x - 3) dx = \frac{4^3}{6} = \frac{32}{3}$$

$$\boxed{4} \quad x^2 = x + 2 \text{ より } x = -1, 2。-1 \leq x \leq 2 \text{ で } x + 2 \geq x^2 \text{ なので、面積は}$$

$$\int_{-1}^2 \{(x + 2) - x^2\} dx = -\int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2) dx = \frac{3^3}{6} = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{5} \quad 2x^2 = 4x + 6 \text{ より } x^2 - 2x - 3 = 0、x = -1, 3。-1 \leq x \leq 3 \text{ で } 4x + 6 \geq 2x^2 \text{ なので、面積}$$

$$\text{は } \int_{-1}^3 \{(4x + 6) - 2x^2\} dx = -2 \int_{-1}^3 (x + 1)(x - 3) dx = 2 \cdot \frac{4^3}{6} = \frac{64}{3}$$

$$\boxed{6} \quad x^2 = -x^2 + 2x + 4 \text{ より } x^2 - x - 2 = 0、x = -1, 2。-1 \leq x \leq 2 \text{ で } -x^2 + 2x + 4 \geq x^2 \text{ な}$$

$$\text{ので、面積は } \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2x + 4) - x^2\} dx = -2 \int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2) dx = 2 \cdot \frac{3^3}{6} = 9$$

$$\boxed{7} \quad x^2 = 2x + 1 \text{ より } x^2 - 2x - 1 = 0。解を } \alpha < \beta \text{ とすると } \alpha = 1 - \sqrt{2}、\beta = 1 + \sqrt{2}。$$

$$\alpha \leq x \leq \beta \text{ で } 2x + 1 \geq x^2 \text{ なので、面積は}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{(2x + 1) - x^2\} dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = \frac{(2\sqrt{2})^3}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\boxed{8} \quad x^2 = mx + 1 \text{ より } x^2 - mx - 1 = 0。判別式は } m^2 + 4 > 0 \text{ なので、つねに 2 点で交わる。解を}$$

$$\alpha < \beta \text{ とすると、} \alpha \leq x \leq \beta \text{ で } mx + 1 \geq x^2 \text{ なので}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{(mx + 1) - x^2\} dx = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}。(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = m^2 + 4 \text{ より}$$

$$S = \frac{(m^2 + 4)\sqrt{m^2 + 4}}{6}。m^2 + 4 \geq 4 \text{ で、} S \text{ は } m^2 + 4 \text{ が大きいほど大きいので、}$$

$$S \geq \frac{4\sqrt{4}}{6} = \frac{4}{3}。等号は } m = 0 \text{ のとき。最小値は } \frac{4}{3} (m = 0)$$