

定積分

定積分 $F'(x) = f(x)$ のとき $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

原始関数 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n = 0, 1, 2, \dots$, C は積分定数)

区間 $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

対称な区間 n が奇数なら $\int_{-a}^a x^n dx = 0$ 、偶数なら $\int_{-a}^a x^n dx = 2 \int_0^a x^n dx$

絶対値 $A \geq 0$ なら $|A| = A$ 、 $A < 0$ なら $|A| = -A$

1 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^3 x^2 dx$

(2) $\int_{-1}^2 (2x + 1) dx$

(3) $\int_0^1 (3x^2 - 4x + 2) dx$

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^1 (x^2 - 2x) dx$

(2) $\int_1^2 (x - 1)(x - 3) dx$

3 $\int_0^2 (x^2 + x) dx + \int_2^3 (x^2 + x) dx$ を求めよ。

4 x の奇数乗の項に注目して、 $\int_{-1}^1 (x^3 + 3x^2 - 2x + 1) dx$ を求めよ。

5 $\int_0^a (2x - 1) dx = 6$ となる正の数 a を求めよ。

6 1 次関数 $f(x) = ax + b$ が $f(1) = 4$ 、 $\int_0^1 f(x) dx = 3$ を満たすとき、定数 a 、 b の値を求めよ。

7 $\int_0^2 |x - 1| dx$ を求めよ。

8 直線上を動く物体の t 秒後の速度が $v = 10 - 2t$ (m/s) である。

(1) 速度は位置を時間で微分したものである。 t 秒後の位置を $x(t)$ とし、 $x(0) = 0$ として $x(t)$ を求めよ。

(2) $t = 0$ から $t = 3$ までの間、物体は向きを変えない。この間に進む道のりを求めよ。



定積分

$$\boxed{1} \quad (1) \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

$$(2) \left[x^2 + x \right]_{-1}^2 = 6 - 0 = 6$$

$$(3) \left[x^3 - 2x^2 + 2x \right]_0^1 = 1$$

$$\boxed{2} \quad (1) \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^1 = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{20}{3} \right) = 6$$

$$(2) \text{ 展開して } \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{3} \quad \text{区間をつなげて } \int_0^3 (x^2 + x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\boxed{4} \quad x^3 \text{ と } -2x \text{ のように } x \text{ の奇数乗の項は、} -1 \text{ から } 1 \text{ までの積分が } 0 \text{ になる。残りは}$$

$$\int_{-1}^1 (3x^2 + 1) dx = 2 \int_0^1 (3x^2 + 1) dx = 2 \left[x^3 + x \right]_0^1 = 4$$

$$\boxed{5} \quad \left[x^2 - x \right]_0^a = a^2 - a = 6 \text{ より } (a-3)(a+2) = 0. \ a > 0 \text{ なので } a = 3$$

$$\boxed{6} \quad f(1) = a + b = 4, \int_0^1 (ax + b) dx = \frac{a}{2} + b = 3 \text{ より } a = 2, b = 2$$

$$\boxed{7} \quad x \leq 1 \text{ で } |x-1| = 1-x, \ x \geq 1 \text{ で } x-1. \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{8} \quad (1) \ x'(t) = 10 - 2t \text{ なので } x(t) = 10t - t^2 + C. \ x(0) = 0 \text{ より } C = 0, \ x(t) = 10t - t^2$$

$$(2) \text{ 向きを変えないので、道のりは } x(3) - x(0) = 21 - 0 = 21 \text{ m. これは } \int_0^3 (10 - 2t) dt \text{ と同じ}$$