

商の微分

月 日 名前

$$\text{商の微分} \quad \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

1 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(2) y = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$(3) y = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$$

2 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{x^2}{x + 2}$$

$$(2) y = \frac{x}{x^2 + 4}$$

3 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$(2) y = \frac{e^x}{x}$$

$$(3) y = \frac{\log x}{x}$$

4 関数 $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ を微分し、できるだけ簡単な形にせよ。

5 関数 $y = \frac{1}{(2x + 1)^2}$ について、次の2通りで導関数を求め、一致することを確認せよ。

(1) 商の微分を使う。

(2) $y = (2x + 1)^{-2}$ とみて、合成関数の微分を使う。

6 曲線 $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ 上の点 $(1, 0)$ における接線の方程式を求めよ。

7 関数 $f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1}$ が $x = 3$ で極値をとるような定数 a の値を求めよ。

8 $\left(\frac{x + 1}{x^2} \right)' = \frac{1}{2x}$ という計算は誤りである。理由を述べ、正しく求めよ。



商の微分

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) & -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \\ (2) & \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \\ (3) & \frac{2(x^2+1)-(2x-3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{2} \quad (1) & \frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} \\ (2) & \frac{(x^2+4)-x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{3} \quad (1) & \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \\ (2) & \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \\ (3) & \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{4} \quad y' = \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x} \quad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ を使う})$$

$$\begin{aligned} \boxed{5} \quad (1) \quad y' &= \frac{0 \cdot (2x+1)^2 - 1 \cdot 2(2x+1) \cdot 2}{(2x+1)^4} = -\frac{4}{(2x+1)^3} \\ (2) \quad y' &= -2(2x+1)^{-3} \cdot 2 = -\frac{4}{(2x+1)^3}. \quad (1) \text{ と一致する} \end{aligned}$$

$$\boxed{6} \quad y' = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \text{ で、 } x=1 \text{ のとき } \frac{1}{2}. \quad y-0 = \frac{1}{2}(x-1) \text{ より } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \boxed{7} \quad f'(x) &= \frac{2x(x-1)-(x^2+a)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-a}{(x-1)^2}. \quad f'(3) = \frac{3-a}{4} = 0 \text{ より } a=3. \text{ このとき} \\ f'(x) &= \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} \text{ は } x=3 \text{ の前後で } - \text{ から } + \text{ に変わるので、確かに } x=3 \text{ で極小。 } a=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{8} \quad & \text{商の導関数は、分子と分母それぞれの導関数の商ではない (} \frac{1}{2x} \text{ は } \frac{(x+1)'}{(x^2)'} \text{)。正しくは} \\ & \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3} \end{aligned}$$