

置換積分

月 日 名前

置換積分 $x = g(t)$ とおくと $\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$

よく使う形 $\int f(g(x)) g'(x) dx$ は $u = g(x)$ とおくと $\int f(u) du$

分数の形 $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)| + C$

注意 不定積分は、もとの変数に戻す

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 2x(x^2 + 1)^3 dx$

(2) $\int x\sqrt{x^2 + 3} dx$

(3) $\int xe^{x^2} dx$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^2 x \cos x dx$

(2) $\int \frac{\log x}{x} dx$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

(2) $\int \tan x dx$

4 $x - 1 = t$ とおいて、 $\int x(x - 1)^4 dx$ を求めよ。

5 $\sqrt{x + 1} = t$ とおいて、 $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx$ を求めよ。

6 $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ を求めよ。

7 $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$ を使って、 $\int \cos^3 x dx$ を求めよ。

8 $\int x(x^2 + 1)^2 dx$ で $u = x^2 + 1$ とおき、 $\int xu^2 du = \frac{xu^3}{3} + C$ とした計算は誤りである。理由を述べ、正しく求めよ。



置換積分

$$\boxed{1} \quad (1) \ u = x^2 + 1 \text{ とおくと } du = 2x \, dx. \quad \int u^3 \, du = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C$$

$$(2) \ u = x^2 + 3 \text{ とおくと } x \, dx = \frac{1}{2} du. \quad \frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = \frac{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}{3} + C$$

$$(3) \ u = x^2 \text{ とおくと } x \, dx = \frac{1}{2} du. \quad \frac{1}{2} \int e^u \, du = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$\boxed{2} \quad (1) \ u = \sin x \text{ とおくと } du = \cos x \, dx. \quad \int u^2 \, du = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$(2) \ u = \log x \text{ とおくと } du = \frac{1}{x} dx. \quad \int u \, du = \frac{(\log x)^2}{2} + C$$

$$\boxed{3} \quad (1) \ (x^2 + 1)' = 2x \text{ なので } \log(x^2 + 1) + C \ (x^2 + 1 > 0)$$

$$(2) \ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} \text{ なので } -\log |\cos x| + C$$

$$\boxed{4} \quad x = t + 1, \, dx = dt. \quad \int (t + 1)t^4 \, dt = \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{(x - 1)^6}{6} + \frac{(x - 1)^5}{5} + C$$

$$\boxed{5} \quad x = t^2 - 1, \, dx = 2t \, dt \ (x > -1 \text{ より } t > 0). \\ \int \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t \, dt = \int (2t^2 - 2) \, dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + C = \frac{2}{3}(x + 1)\sqrt{x + 1} - 2\sqrt{x + 1} + C$$

$$\boxed{6} \quad (e^x + 1)' = e^x \text{ なので } \log(e^x + 1) + C \ (e^x + 1 > 0)$$

$$\boxed{7} \quad u = \sin x \text{ とおくと } du = \cos x \, dx. \quad \int (1 - u^2) \, du = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\boxed{8} \quad x \text{ は } u \text{ とともに変わるの、定数のように積分の中に残してはいけない。} \, du = 2x \, dx \text{ より} \\ x \, dx = \frac{1}{2} du \text{ として、} \quad \frac{1}{2} \int u^2 \, du = \frac{u^3}{6} + C = \frac{(x^2 + 1)^3}{6} + C$$